Dans cette séance on va voir :

(i) notion de SEL homogène et inhomogène

(ii) notion de solution triviale d'un SEL homogène

(iii) lien entre familles liées/libres et SEL

(iv) une caractérisation de $S_{(*)}$ d'un SEL $(*)$ en fonction d'un SEL homogène associé

(v) notion d'application linéaire $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et son image

Déf. 3.5 Un SEL

$$(*) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m, \end{cases}$$

est dit

- <u>homogène</u> si $b_1 = \dots = b_m = 0$
- <u>inhomogène</u> si il existe au moins un $b_i \neq 0$.

Rq. Si l'on écrit (*) sous forme vectorielle, i.e.

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

produit matrice et vecteur !

alors (*) est <u>homogène</u> si $\bar{b} = \emptyset = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>inhomogène</u> si $\bar{b} \neq \emptyset$.

Déf. 3.5 (suite) La solution triviale d'un SEL homogène $A.\bar{x} = \bar{0}$ est $\bar{x} = \bar{0}$ (ou $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$).

Exemple 3.10* (modifié)

$$(*)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 \quad - x_3 \quad = -3 \end{cases}$$

→ 1) Exprimer $(*)$ sous forme vectorielle

2) Calculer $S_{(*)}$

1) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OEL}} \dots \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$

FER

pivots !

dans 1ère et 2ème colonnes $\Longrightarrow$ x_1 et x_2 sont var liées

$\xrightarrow[\text{le SEL équiv à la FER}]{}$ $\begin{cases} x_1 - x_3 = -3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$ $\xrightarrow[\text{var libres à droite!}]{}$ $\begin{cases} x_1 = -3 + x_3 \\ x_2 = 4 - 2x_3 - x_4 \end{cases}$

Alors

$$S_{(*)} = \left\{ \left(-3 + x_3, 4 - 2x_3 - x_4, x_3, x_4\right) : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\square$

Point clé

Pour $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^m$, alors

$\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ est lié $\Longleftrightarrow$ le SEL $[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \cdot \bar{x} = \bar{0}$ admet une sol non triviale

$\boxed{\text{Notation}}$ (Rappel) $[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] := \begin{pmatrix} \boxed{\bar{a}_1} & \dots & \boxed{\bar{a}_n} \end{pmatrix} \leftarrow$ matrice de taille $m \times n$ $\square$

(Preuve) $\Rightarrow$) Comme $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ est liée, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\underbrace{\lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = \bar{0}}$ avec un $\lambda_i \neq 0$. Par définition,

$$\bar{0} \underset{\text{par hyp}}{=} \lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n \overset{\text{déf}}{=} [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$ est sol. de $[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \cdot \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = 0$ qui n'est pas triviale car il existe un $\lambda_i \neq 0$.

$\Leftarrow$) [Exercice] piste : faire la preuve à l'envers.

THM. 3.12 | Soit $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^m$.
Si $p > m$, alors $\mathcal{F}$ est liée.

Obs | On n'a pas rencontré des SEL avec seulement 2 solutions. Ce n'est pas un accident !
(ni une quantité finie > 1 de sol.)

THM. 3.13 | Soit $(*)$ $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ un SEL inhomogène (i.e. $\bar{b} \neq \bar{0}$) et soit $(*)_h$ $A.\bar{x} = \bar{0}$ le SEL homogène associé. Soit $\bar{v}_p \in \mathbb{R}^n$ une sol. de $(*)$ (i.e. $A.\bar{v}_p = \bar{b}$). Alors

vecteur fixe!

$$S_{(*)} = \left\{ \bar{v}_p + \bar{v}_h \ : \ \bar{v}_h \in S_{(*)_h} \right\}$$

Exemple 3.10* (suite)

$$(*) \ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\bar{b} \neq \binom{0}{0}}$$

$(*)_h \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Imaginons qu'on sait que } \bar{v}_p = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est Sol. de } (*).}$

Il suffit de calculer les Sol. de $(*)_h$!!!

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cancel{0} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OEL}} \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 - x_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow S_{(*)_h} = \left\{ (x_3, -2x_3 - x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Alors, par le THM :

$$S_{(*)} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_p} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_h} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -3 + x_3 \\ 4 - 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$\square$

THM 3.4 Pour tout SEL, on a

aucune solution ou une unique solution ou une infinité de solutions.

Déf. 3.16 Une application linéaire est une application $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ qui satisfait

$\approx$ fonction

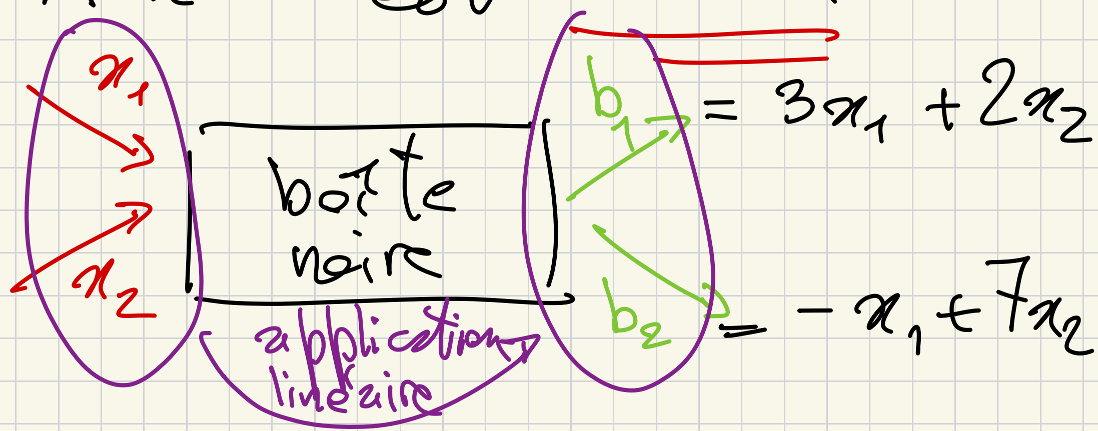
que $T(\bar{v} + \lambda . \bar{w}) = T(\bar{v}) + \lambda . T(\bar{w})$
pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{Exemple}}$ Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, alors l'application

$T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ donnée par

$T_A(\bar{x}) = A . \bar{x}$ est linéaire.

$\boxed{\text{Motivation}}$



Quand on veut résoudre un SEL
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ -x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$$
, en fait, on est en train de trouver ce qu'il faut donner comme input à la boîte noire pour obtenir $b_1 = 5$ et $b_2 = 2$